Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = 2x - x\ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

1/a) Montrer que f est continue à droite en 0

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 ; interpréter graphiquement

2/a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3/a) Déterminer l'intersection de (ζ_f) avec l'axe des abscisses

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement

4/ Tracer (ζ_f) dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$

5/a) En intégrant par partie calculer $I = \int_1^e x\ln(x)dx$

b) Calculer l'aire de la région du plan limité par (ζ_f) et les droites d'équations $x=1$; $x=e$ et $y=0$

Exercice 2

I/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x^2-1 + \ln x$

1/ Dresser le tableau de variation de g

2/ Calculer g (1) et en déduire le signe de g(x) pour x de $]0,+\infty[$

II/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un R.O.N $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm)

1/a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire le tableau de variation de f.

2/a) Montrer que la droite (Δ) d'équation : $y = x - 1$ est une asymptote à (ζ_f)

b) Etudier la position de (ζ_f) par rapport à (Δ)

3/ Tracer (Δ) et (ζ_f)

4/ Soit h la restriction de f à l'intervalle $I = [1,+\infty[$

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h ; Tracer dans le même repère que (ζ_f), la courbe représentative $(\zeta_{h^{-1}})$ de h^{-1}

5/ Calculer l'aire en cm^2 de la région du plan limité par (ζ_f) la droite (Δ) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

EXERCICE N°3

On Considère une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et dont le tableau de variation est le suivant :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	‖	$+$	
f(x)	1 ↘		0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-3

On note (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1/ Répondre par vraie ou faux sans justification

a) 0 est un minimum local de f

b) La droite d équation $x = 2$ est une asymptote à (ζ_f)

c) La droite d équation $y = -3$ est une asymptote à (ζ_f)

d) La courbe (ζ_f) admet une asymptote oblique

2/ Déterminer le signe de f(x) pour $x \in]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

3/ Soit la fonction g définie par $g(x) = \ln(|f(x)|)$

a) Montrer que g est définie sur l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

b) Donner le tableau de variation de g

Donner une allure de la courbe (ζ_g) de g dans un repère orthonormé

Exercice N°4

I- Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x + \ln x$

1/ Dresser le tableau de variation de g

2/a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$ et que $0.27 < \alpha < 0.28$

b) En déduire le signe de g(x)

II- On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un R.O.N $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat

2/a) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3/a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ .Interpréter graphiquement le résultat

b) Vérifier que $f(\alpha) = -\alpha$

c) Tracer (ζ_f)